1166. 或ル種ノ二階常微分方程式ノ週期解ニツイテ

南雲　道夫（阪大）

§1. 序

非線型二階常微分方程式

$$(0)\quad \frac{d^2x}{dt^2}+a(x)\frac{dx}{dt}+\phi(x)=f(t)$$

ニ於テ $a(x)>0$, $\phi(0)=0$, $\phi'(x)>0$ トシ, $f(t)$ ハ ω ヲ週期トスル任意ノ連続函数トスレバ (0) ハ ω ヲ週期トスル解ヲ持ツ。但シ $a(x)$, $\phi(x)$ ニ關スル細カイ附帯條件ハ後ニ述ベル。

尚 $|f(t)|$ ノ大サヲ或ル制限以下ニ限レバ, (0) ハ只一ツノ週期解ヲモチ, 他ノ解ハスベテ $t\longrightarrow+\infty$ ノ時此

ノ週期解ニ収斂スル。又特ニ $\phi(x)=kx$ (k ハ正ノ常数) ナルトキヤ, 或ハ $a(x)=\lambda\phi'(x)$, $\phi'(x)\geqq\phi'(0)$, $\lambda>1$ ナルトキニハ, $|f(t)|$ ノ大サニ制限ナク此ノ事ガ成立スル。

然シ一般ノ場合ニハ, コノ制限ガ果シテ必要デアルカドウカ未ダ分ラナイ。以上ノコトヲ証明スルノガ本論文ノ目的デアル。

§2. 週期解ノ存在

定理1. 開区間 $l_1<x<l_2$ (但シ $l_1<0<l_2$ トス) ニ於テ $a(x)$ ハ連續, $\phi(x)$ ハ連續的微分可能ナ函数デ次ノ諸條件ヲ満足スル。

(1) $a(x)\geqq a_0>0,\quad \phi(0)=0,\quad \phi'(x)>0$

(2) $\lim\limits_{x\to l_1}\phi(x)=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to l_2}\phi(x)=+\infty$

(3) $\int_0^x\phi(x)\,dx=\Phi(x)$ トオクトキ, $\lim\limits_{x\to l_i}\Phi(x)=+\infty$

$(i=1,2)$

(4) $f(t)$ ハ ω ヲ週期トスル連續函数デ $|f(t)|\leqq F$.

以上ノ假定(1), (2), (3), (4) ガ成立スルトキ, (0) ハ ω ヲ週期トスル解 $x(t)$ ヲ少クトモ一ツモツ。又 F ヲ充分小サナ常数ニトレバ, 解 $|x(t)|$ ノ最大値ヲ F ト共ニ任意ニ小サク出来ル。

証明

(5) $A(x)=\int_0^x a(x)\,dx$

トオキ, $y = x' + A(x)$ トスレバ二階ノ微分方程式 (0) ハ聯立微分方程式

$$(0_1)\quad \begin{cases} x' = y - A(x) \\ y' = -\phi(x) + f(t) \end{cases}$$

ト同等ニナル。此ノ右辺ノ函数ハ x, y ニツキりぷしつノ條件ヲ満タシテ居ルカラ, $t=0$ ニ於ケルソノ初期値ヲ x_0, y_0 トスルトキ, ソノ解 $x(t, x_0, y_0)$, $y(t, x_0, y_0)$ ハ (t, x_0, y_0) ニツイテ (ソノ存在範囲内ニアルカギリハ) 連續トナル。

扨テ

$$(6)\quad \{y^2 + (y - A(x))^2\}/2 + 2\Phi(x) = P(x, y)$$

トオケバ, $P(x, y) \leqq C\ (C>0)$ ナル範囲ハ

$$A(x)/2 + \sqrt{C - [2\Phi(x) + A(x^2)/4]}$$
$$\geqq y \geqq A(x)/2 - \sqrt{C - [2\Phi(x) + A(x)^2/4]}$$

ト一致シ, 之ハ單一閉曲線 $P(x, y) = C$ ニ囲マレタ閉領域デアル。

$P(x, y) = (0_1)$ ノ解ヲ代入スレバ C ヲ適當ナ正ノ常数トスルトキ,

$$(7)\quad P(x, y) \geqq C \text{ デハ } \frac{d}{dt}P(x, y) < 0$$

何トナレバ

$$(8)\quad \frac{d}{dt}P(x, y) = -a(x)\{y - A(x)\}^2$$

$$+2\{y-A(x)\}f(t)-A(x)\phi(x)+A(x)f(t)$$

所ガ

$$\lim_{x\to l_i} A(x)\phi(x)=+\infty \quad (i=1,2) \text{ 及ビ } (2) \text{ ヨリ}$$

$$(9)\quad \begin{cases} (x-l_1')(x-l_2')>0 \text{ ナル時,} \\ A(x)\phi(x)>2F^2/a_0, \quad |\phi(x)|>2F \end{cases}$$

トナル様ナ l_1', l_2' ガトレル。又 C ヲ充分大ニスレバ, (4) ト (6) トカラ

$$(10)\quad \begin{cases} l_1'\leqq x\leqq l_2' \text{ 且ツ } P(x,y)\geqq C \text{ ナル時,} \\ |y-A|>4F/a_0, \quad (y-A)^2>2|A|F/a_0 \end{cases}$$

トナル。従ッテ (7) 及ビ (4), (8), (9) カラ (7) ガ成立ツ。

扨テ (7) ニヨリ, (x_0, y_0) ヲバ $P(x_0, y_0)\leqq C$ ナル範囲ニトレバ, $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$ ナル (0_1) ノ解ハ $t\geqq 0$ ニ於テ常ニ $P(x,y)\leqq C$ 内ニ存在スル。カヽル (0_1) ノ解ニツイテ $x(w)=x_1$, $y(w)=y_1$ トオケバ $(x_0, y_0)\longrightarrow(x_1, y_1)$ ナル連續寫像ニヨリ, $P(x,y)\leqq C$ ナル範囲ハソレ自身ノ部分ニ移サレル. 所ガコノ範囲ハ円ト位相同型デアルカラ, 不動点ノ定理ニヨリ, ソノ範囲内ニハ丁度

$$(11)\quad (x_1, y_1)=(x_0, y_0)$$

トナル様ナ点ガ存在スル。方程式 (0_1) ハ t ヲ $t+w$ ニ変ヘテモ不変デアルカラ, カヽル初期値 (x_0, y_0) ヲモツ解ニツイテハ, $x(t+w)=x(t)$, $y(t+w)=y(t)$ ガ成立スル。即チ $x(t)$ ハ (0) ノ週期解デアル。

尚 $C>0$ ヲ任意ニトルトキ，l_1'，l_2' ヲバ充分 0 ニ近ク選ベバ，$l_1'\leqq x\leqq l_2'$，$P(x,y)\geqq C$ ニ於テハ，常ニ $|y-A|\geqq\delta>0$ ナル δ ガ存在スル。又 $x\neq 0$ デハ $A(x)\phi(x)>0$，$|\phi(x)|>0$ ナル故ニ，F ヲ適當ニ小サクトレバ，(9) 及ビ (10) ガ成立スル。故ニ F ガ小サイトキニハ C_F，従ッテ解ノ大キサ $|x(t)|$ モ小サクナル。
（証明了）

§3. 漸近性ノ問題

次ニ (0) ノ週期解 $x_0(t)$ ニ對シ，他ノ解 $x(t)$ ハ $t\longrightarrow\infty$ ノ時ニ，

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)-x_0(t)|=0$$

トナル場合ヲ考察スル。

先ヅ (7) ニヨリ，(0,) ノ任意ノ解 $x(t)$，$y(t)$ ハ，t ガ充分大トナレバ，必ズ $P(x,y)<C$ ナル範囲内ニ入ッテシマフ。故ニ茲ニハ $x(t)$，$y(t)$ ハ $P(x,y)<C$ 内ニアルモノト考ヘル。

今 (x,y) 平面内ノ任意ノ滑ラカナ曲線 $\mathcal{L}$ ヲ考ヘ，ソノ長サヲバ

$$(12)\quad \int\sqrt{\delta x^2-2b\,\delta_x\delta_y+c\,\delta y^2}=S[\mathcal{L}]$$

ニヨッテ定メル。但シ δx，δy ハ曲線ノ助変数ニ関スル x，y ノ微分デアリ，b，c ハ（根号内ガ正定形ノ條件）

(13) $C - b^2 > 0$

ナル如キ常数デアル。$\mathcal{L}_0$ ヲバ $t = t_0$ ニ於テ $P(x, y) < C$ 内ノ任意ノ滑ラカナ曲線トシ，ソノ各点ガ $(0,)$ ノ解ニ従ッテ移動シテ一般ノ t ニ對スルモノヲ單ニ $\mathcal{L}$ デ示セバ，δ_x, δ_y ノ変化ハ微分方程式

$$(14)\quad \begin{cases} \delta_x' = \delta_y - a(x)\delta_x \\ \delta_y' = -\phi'(x)\delta_x \end{cases}$$

ニ従フコトヨリ

$$(15)\quad \frac{d}{dt} S[\mathcal{L}] = -\int \frac{G(x)\delta_x^2 + H(x)\delta_x\delta_y + b\delta_y^2}{\sqrt{\delta_x^2 - 2b\delta_x\delta_y + C\delta_y^2}}$$

トナル。但シ $G(x)$, $H(x)$ ハ

$$(16)\quad \begin{cases} G(x) = a(x) - b\phi'(x) \\ H(x) = 1 - ba(x) + C\phi'(x) \end{cases}$$

デアル。故ニ $P(x, y) \leqq C$ 内ニ於テ δ_x, δ_y ノ二次形式

$$G(x)\delta x^2 + H(x)\delta_x\delta_y + b\delta_y^2$$

ガ正ノ定形，即チ

$$(17)\quad 4b[a(x) - b\phi'(x)] > [1 + ba(x) - C\phi'(x)]^2$$

ナル如キ正ノ常数 a, b ガ存在スルトキハ，$\varepsilon > 0$ ヲ充分小サクトレバ

$$(18)\quad \frac{d}{dt} S[\mathcal{L}] \leqq -\varepsilon S[\mathcal{L}]$$

従ッテ

$$(19)\quad S[\mathcal{L}] \leqq S[\mathcal{L}_0]\, e^{-\varepsilon(t - t_0)}$$

故ニ

$$\lim_{t\to+\infty} S[L]=0$$

之レカラ $P(x,y)\leqq C$ 内ニアル $(0,)$ ノ任意ノ二組ノ解 $x_\nu(t)$, $y_\nu(t)$ $(\nu=1,2)$ ニツキ

$$(20)\quad \begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty}\{x_1(t)-x_2(t)\}=0, \\ \lim\limits_{t\to+\infty}\{y_1(t)-y_2(t)\}=0 \end{cases}$$

ガ得ラレル。

一般ノ場合ニハ

$$(21)\quad b=\frac{a(0)}{2\phi'(0)},\quad C-\frac{\phi'(0)+\{a(0)\}^2}{2\{\phi'(0)\}^2}$$

トオケバ，$x=0$ ニ於テ (17) ガ成立スル。従ッテ $\delta>0$ ヲ適當ニ小サクトレバ，$|x|<\delta$ ニ於テ (17) 及ビ (13) ガ成立スル。所ガ F ヲ適當ニ小サクスレバ従ッテ C ヲ小サクスレバ $P(x,y)\leqq C$ ナル範囲ハ $|x|<\delta$ 内ニ納マル。故ニ F ガ適當ニ小ナラバ (20) ガ成立スル。

之カラ次ノ定理ヲ得ル。

定理2. <u>$a(x)$, $\phi(x)$, $f(t)$ ガ定理1ノ假定 (1), (2), (3), (4) ニ從フトキ，F ガ適當ニ小サナ正ノ常數ナラバ方程式 (0) ハ ω ヲ週期トスル解 $x=x_0(t)$ ヲ丁度一ツ有チ，(0) ノ任意ノ解 $x(t)$ ニツイテ</u>

$$\lim_{t\to+\infty}|c(t)-x_0(t)|=0$$